Гармонический четырехугольник

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

0. **Тождество Птолемея.** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

1. Докажите, что следующие свойства вписанного четырёхугольника $ABCD$ равносильны.

   (а) $ABCD$ — гармонический четырёхугольник.

   (б) AC — симедиана треугольника ABD.

   (в) Если M — середина AC, то $\angle BMC = \angle BAD$.

   (г) Если M — середина AC, то $\angle BMC = \angle DMC$.

2. В окружности ω провели две параллельных хорды AB и CD. E– точка пересечения ω и прямой, проходящей через C и середину AB. Пусть F — середина DE. Докажите, что $\angle AFE = \angle BFE$.

3. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

4. Высота и симедиана, проведённые из вершины A треугольника ABC, пересекают описанную окружность в точках A_1 и S. Пусть M– середина стороны BC. Докажите, что $\angle MSA_1 = 90°$.

5. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность Ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности Ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BM. На отрезке BM нашлась точка P такая, что биссектрисы углов BAP и BCP пересеклись в точке Q на BM. Докажите, что $\angle AQC = 90°$.

7. Через вершины B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая ℓ, перпендикулярная BC. Две окружности, проходящие через точки C и D, касаются прямой ℓ в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины отрезка AB под равными углами.