

Гармонический четырехугольник

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

1. Докажите, что следующие свойства вписанного четырёхугольника $ABCD$ равносильны.
 - (а) $ABCD$ — гармонический четырёхугольник.
 - (б) AC — симедиана треугольника ABD .
 - (в) Если M — середина AC , то $\angle BMC = \angle BAD$.
 - (г) Если M — середина AC , то $\angle BMC = \angle DMC$.
2. В окружности ω провели две параллельных хорды AB и CD . E — точка пересечения ω и прямой, проходящей через C и середину AB . Пусть F — середина DE . Докажите, что $\angle AFE = \angle BFE$.
3. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB . Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH .
4. Высота и симедиана, проведённые из вершины A треугольника ABC , пересекают описанную окружность в точках A_1 и S . Пусть M — середина стороны BC . Докажите, что $\angle MSA_1 = 90^\circ$.
5. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность Ω , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности Ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC , проведённую из вершины B .
6. В неравностороннем треугольнике ABC проведена медиана BM . На отрезке BM нашлась точка P такая, что биссектрисы углов BAP и BCP пересеклись в точке Q на BM . Докажите, что $\angle AQC = 90^\circ$.
7. Через вершины B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая ℓ , перпендикулярная BC . Две окружности, проходящие через точки C и D , касаются прямой ℓ в точках P и Q . Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины отрезка AB под равными углами.