Многочлены

1. Пусть a, b, c — целые числа, такие, что $b \neq c$. Докажите, что если многочлены

$$ax^2 + bx + c \quad \text{и} \quad (c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$$

имеют общий корень, то $3 \mid a + b + 2c$.

2. Пусть f — приведенный целочисленный многочлен степени n с ненулевыми коэффициентами. Известно, что у этого многочлена есть n различных целых попарно взаимно простых корней. Докажите, что его коэффициенты a_n и a_{n-1} взаимно просты.

3. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2 + Q^2 = R^2$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

4. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2022?

5. На доске написано: $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого — получить уравнение, имеющее ровно один действительный корень. Сможет ли второй ему помешать?

6. Два многочлена

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{и} \quad Q(x) = x^2 + px + q$$

принимают отрицательные значения на некотором интервале длины, большей 2, и неотрицательные значения вне этого интервала. Докажите, что $P(x_0) < Q(x_0)$ в некоторой точке x_0.

7. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2022 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2,..., n_k и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

8. Докажите, что каждый приведенный многочлен степени n можно представить в виде полусуммы двух приведенных многочленов степени n, каждый из который имеет n вещественных корней (с учетом кратности).