Системы линейных уравнений в задачах

1. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Разрешается провести взвешивание, кладя

(а) по одному банану на каждую чашу весов;

(б) поровну бананов на обе чаши весов;

(в) бананы как угодно.

Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково.

2. Внутри отрезка $[0,1]$ выбрали n различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

3. В некоторых вершинах связного графа (без петель и кратных ребер) записаны действительные числа. Докажите, что можно записать числа в оставшихся вершинах, так чтобы каждое из вновь написанных чисел было бы средним арифметическим своих соседей.

4. Имеется 101 корова. Известно, что любые 100 коров можно разбить на два стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково, если известно, что

(а) масса каждой коровы целое число граммов (масса коровы может быть отрицательной);

(б) масса каждой коровы рациональное число граммов;

(в) масса каждой коровы действительное число граммов.

5. На доске выписано 100 **(а)** целых; **(б)** действительных чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

6. В n-элементном множестве выделены $n-1$ подмножеств. Докажите, что можно покрасить некоторые (хотя бы один) элементы в красный и синий цвета так, что в каждом выделенном подмножестве либо не будет окрашенных элементов, либо будут присутствовать элементы обоих цветов.

7. В вершинах правильного 101-угольника расставлены единицы. За один ход разрешается выбрать четыре подряд стоящие числа, вычесть по 1 из двух средних и прибавить по 1 к двум крайним. Можно ли не более чем за 10000 таких ходов получить расстановку, в которой все числа, кроме одного, равны нулю?