Системы линейных уравнений

Определение. Пусть $a_{i,j}, b_i$ — некоторые коэффициенты. Системой линейных уравнений (СЛУ) называется система

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Определение. Система линейных уравнений, в которой $b_1 = \ldots = b_m = 0$, называется *однородной*.

1. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ — решения некоторой однородной СЛУ. Докажите, что $(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$ и $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$ также являются решениями данной СЛУ.

2. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ — решения некоторой СЛУ. Докажите, что $(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \ldots, x_n - x'_n)$ являются решениями однородной СЛУ, полученной из исходной заменой всех b_i на нули.

3. Рассмотрим операции трёх видов:
(I) Прибавить i—е уравнение к j-му;
(II) Умножить i-е уравнение на ненулевое число;
(III) Поменять местами любые 2 уравнения местами.
(а) Докажите, что данные операции не меняют множество решений СЛУ;
(б) Докажите, что такими операциями систему можно привести к ступенчатому виду, то есть к виду

$$\begin{cases} a_{1,p}x_p + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1_m}x_m = b_1 \\ \quad a_{2,q}x_q + \ldots\ldots\ldots\ a_{2,m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ \quad\quad a_{k,t}x_t + \ldots\ldots + a_{k,m}x_m = b_k \\ 0 = b_{k+1} \\ \ldots \\ 0 = b_n, \end{cases}$$

где $p < q < \ldots < t$, и $a_{1,p}a_{2,q}\ldots a_{k,t} \neq 0$. Переменные $x_p, x_q, \ldots, x_t$ называются *свободными*.
(в) Докажите, что каждая СЛУ может иметь только 0,1 или ∞ решений.

4. Приведите к ступенчатому виду и решите систему:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 2x + 7y + 3z = 2 \\ -x - 3y = 3 \\ 3x + 10y + 5z = 7. \end{cases}$$

5. Докажите, что если в однородной СЛУ количество переменных больше количества уравнений, то СЛУ имеет ненулевое решение.

6. Некоторая СЛУ с рациональными коэффициентами имеет вещественное решение. Докажите, что оно имеет рациональное решение.

7. **Альтернатива Фредгольма.** Пусть в СЛУ количество переменных совпадает с количеством уравнений. Докажите, что либо данная СЛУ имеет единственное решение, либо соответствующая ей однородная СЛУ имеет ненулевое решение.

8. Докажите, что количество свободных переменных в ступенчатом виде СЛУ не зависит от способа приведения к ступенчатому виду.