

Симедиана

Определение. Симедианой треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. Пусть BK — симедиана треугольника ABC . Докажите, что $\frac{AK}{KC} = \frac{AB^2}{BC^2}$.
2. (**Основная**). Касательные описанной окружности треугольника ABC , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Докажите, что BP — симедиана треугольника ABC .
3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Окружность, построенная на BO как на диаметре, повторно пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке S . Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC .
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC во вне построены квадраты $ABXY$ и $BCKL$. Прямые XY и KL пересекаются в точке T . Докажите, что BT — симедиана треугольника ABC .
5. Даны окружность, её хорда AB и середина C_0 меньшей дуги AB . На большей дуге AB выбирается произвольная точка C . Касательная к окружности, проведённая из точки C , пересекает касательные, проведённые из точек A и B , в точках X и Y соответственно. Прямые C_0X и C_0Y пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C .
6. Внутри равнобедренного треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle PBC = \angle PCA$. Пусть M — середина основания BC . Докажите, что $\angle BPM + \angle CPA = 180^\circ$.
7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω , описанную около треугольника ABC , в точках B и E . Окружность ω , построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F . Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD , содержит медиану треугольника ABC .

Определение. Три симедианы треугольника ABC пересекаются в одной точке, которая называется точкой Лемуана треугольника ABC .

8. (а) Через точку Лемуана L внутри треугольника провели три отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что проведённые отрезки равны.
(б) Через точку L провели прямые, параллельные сторонам треугольника и отметили точки пересечения с остальными сторонами. Докажите, что отмеченные шесть точек лежат на одной окружности.
(в) Докажите, что центр окружности из предыдущего пункта является серединой отрезка OL , где O — центр описанной окружности треугольника ABC .