

## Симедиана

**Определение.** Симедианой треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. Пусть  $BK$  — симедиана треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\frac{AK}{KC} = \frac{AB^2}{BC^2}$ .
2. (**Основная**). Касательные описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведённые в точках  $A$  и  $C$ , пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $BP$  — симедиана треугольника  $ABC$ .
3. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ . Окружность, построенная на  $BO$  как на диаметре, повторно пересекает описанную окружность треугольника  $AOC$  в точке  $S$ . Докажите, что  $BS$  — симедиана треугольника  $ABC$ .
4. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  во вне построены квадраты  $ABXY$  и  $BCKL$ . Прямые  $XY$  и  $KL$  пересекаются в точке  $T$ . Докажите, что  $BT$  — симедиана треугольника  $ABC$ .
5. Даны окружность, её хорда  $AB$  и середина  $C_0$  меньшей дуги  $AB$ . На большей дуге  $AB$  выбирается произвольная точка  $C$ . Касательная к окружности, проведённая из точки  $C$ , пересекает касательные, проведённые из точек  $A$  и  $B$ , в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Прямые  $C_0X$  и  $C_0Y$  пересекают прямую  $AB$  в точках  $N$  и  $M$  соответственно. Докажите, что длина отрезка  $NM$  не зависит от выбора точки  $C$ .
6. Внутри равнобедренного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $P$  такая, что  $\angle PBC = \angle PCA$ . Пусть  $M$  — середина основания  $BC$ . Докажите, что  $\angle BPM + \angle CPA = 180^\circ$ .
7. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$  (точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ ). Прямая  $BD$  пересекает окружность  $\Omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ . Окружность  $\omega$ , построенная на отрезке  $DE$  как на диаметре, пересекает окружность  $\Omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что прямая, симметричная прямой  $BF$  относительно прямой  $BD$ , содержит медиану треугольника  $ABC$ .

**Определение.** Три симедианы треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке, которая называется точкой Лемуана треугольника  $ABC$ .

8. (а) Через точку Лемуана  $L$  внутри треугольника провели три отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что проведённые отрезки равны.  
(б) Через точку  $L$  провели прямые, параллельные сторонам треугольника и отметили точки пересечения с остальными сторонами. Докажите, что отмеченные шесть точек лежат на одной окружности.  
(в) Докажите, что центр окружности из предыдущего пункта является серединой отрезка  $OL$ , где  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .