

Геометрические неравенства

1. Дан четырёхугольник $ABCD$ причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD . Докажите, что $AM < MC$.
2. Из точки M внутри четырёхугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры на стороны, причем основания перпендикуляров лежат внутри сторон. Обозначим эти основания: то, которое лежит на стороне AB через X , лежащее на стороне BC – через Y , лежащее на стороне CD — через Z , лежащее на стороне DA через T . Известно, что $AX \geq XB, BY \geq YC, CZ \geq ZD, DT \geq TA$. Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.
3. Даны $n > 1$ точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ на окружности радиуса 1. Докажите, что на этой окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \dots + PA_n \geq n$.
4. В треугольнике длины двух высот соответственно равны 12 и 20. Докажите, что длина третьей высоты меньше 30.
5. Площади треугольников $ABC, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ равны S, S_1, S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2, AC = A_1C_1 + A_2C_2, BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \geq 4\sqrt{S_1S_2}$.
6. Внутри треугольника ABC выбраны точки M и N . Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника отличается от суммы расстояний от точки N до вершин треугольника не более чем на длину отрезка MN .
7. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ соответственно. Докажите, что

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leq \frac{3}{2}\sqrt{S_{ABC}}$$

8. Докажите, что центр вписанной окружности в треугольник ABC лежит внутри его серединного треугольника.
9. Для какой точки X внутри треугольника произведение расстояний от неё до его сторон будет максимальным?