Геометрические неравенства

1. Дан четырёхугольник $ABCD$ причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

2. Из точки M внутри четырёхугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры на стороны, причем основания перпендикуляров лежат внутри сторон. Обозначим эти основания: то, которое лежит на стороне AB через X, лежащее на стороне BC – через Y , лежащее на стороне CD — через Z, лежащее на стороне DA через T. Известно, что $AX \geqslant XB, BY \geqslant YC, CZ \geqslant ZD, DT \geqslant TA$. Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

3. Даны $n > 1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на окружности радиуса 1. Докажите, что на этой окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \ldots + PA_n \geqslant n$.

4. В треугольнике длины двух высот соответственно равны 12 и 20. Докажите, что длина третьей высоты меньше 30.

5. Площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S, S_1, S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2, AC = A_1C_1 + A_2C_2, BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \geqslant 4\sqrt{S_1S_2}$.

6. Внутри треугольника ABC выбраны точки M и N. Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника отличается от суммы расстояний от точки N до вершин треугольника не более чем на длину отрезка MN.

7. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 соответственно. Докажите, что
$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{S_{ABC}}$$

8. Докажите, что центр вписанной окружности в треугольник ABC лежит внутри его серединного треугольника.

9. Для какой точки X внутри треугольника произведение расстояний от неё до его сторон будет максимальным?