# Разнобой

1. Клетки таблицы $n \times n$ заполнены знаками «+» и «−». За одну операцию разрешается выбрать один ряд (столбец или строку) и заменить все знаки в этом ряду на противоположные. Известно, что с помощью таких операций можно изначальную таблицу превратить в таблицу из одних плюсов. Докажите, что это можно сделать, потратив не более $n$ операций.

2. Обозначим за $O$ центр описанной окружности треугольника $ABC$. Прямая $BO$ пересекается со средней линией $B_0C_0$ в точке $P$. Докажите, что угол $C_0PB$ равен углу $B_0PH$, где $BH$ — высота треугольника $ABC$.

3. Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат (т. е. квадрат целого числа), либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

4. Пусть $D$ — основание внешней биссектрисы угла $B$ треугольника $ABC$, в котором $AB > BC$. Сторона $AC$ касается вписанной и вневписанной окружностей в точках $K$ и $K_1$ соответственно, точки $I$ и $I_1$ — центры этих окружностей. Прямая $BK$ пересекает $DI_1$ в точке $X$, а $BK_1$ пересекает $DI$ в точке $Y$. Докажите, что $XY \perp AC$.

5. Рациональные числа $x$, $y$ и $z$ таковы, что все числа $x+y^2+z^2$, $x^2+y+z^2$ и $x^2+y^2+z$ целые. Докажите, что число $2x$ целое.

6. Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

7. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество целых решений уравнения $P(x)^2 = 1$. Докажите, что $n(P) \leqslant deg(P) + 2$.

8. В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна $a$, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна $b$. Докажите, что $a = b$.