

## Графы. Разнобой

1. В компании из шести человек любые пять можно посадить за круглый стол так, чтобы любое двое, сидящие рядом, были знакомы. Докажите, что все шесть человек тоже можно посадить за круглый стол так, чтобы любое двое, сидящие рядом, были знакомы. (Знакомство взаимно.)
2. В классе учатся 30 человек. Причем каждый дружит хотя бы с  
(а) 15-ю  
(б) 6-ю  
другими. Докажите, что среди них можно выбрать четверых и посадить их за круглый стол так, что каждый сидит рядом со своими друзьями.
3. Рёбра выпуклого многогранника ориентировали таким образом, что из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка и в каждую вершину входит хотя бы одна. Докажите, что рёбра некоторой грани образуют ориентированный цикл.
4. В компании у каждого сотрудника не менее 50 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка знаковых содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.
5. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70-ю участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более чем с 10-ю участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.
6. Несколько деревень соединены дорогами, причем длина каждой дороги меньше 10 км. Известно, из любой деревни до любой другой можно добраться, проехав меньше 10 км. Одну дорогу закрыли, но всё еще можно добраться из любой деревни до любой другой. Докажите, что это можно сделать, проехав меньше 30 км. (Дороги могут быть извилистыми, т.е. равенство треугольника не обязательно выполнено.)
7. Степень каждой вершины графа не превосходит  $n$ , при этом среди любых  $t$  вершин найдутся две соединённые ребром. При каком наибольшем числе вершин это возможно?
8. В архипелаге  $n$  островов, и между любыми двумя из них ходит катер (в обе стороны). Для каждой пары островов время в пути между ними одинаковое в обе стороны, а для разных пар островов время в пути разное. Турист хочет совершить  $n - 1$  поездку на катере, причём так, чтобы каждая следующая поездка длилась дольше предыдущей. Докажите, что он сможет это сделать. (Турист сам выбирает изначальный остров, он не обязан в него возвращаться, также турист согласен попадать на один и тот же остров больше одного раза.)