Многочлены

Теорема Безу. Для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ и для любого числа $a \in \mathbb{R}$ остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x - a)$ равен $P(a)$.

1. Дан многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Различные вещественные числа a_1, a_2, ..., a_k являются его корнями. Докажите, что $P(x)$ делится на многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)$.

2. Докажите, что у ненулевого многочлена из $\mathbb{R}[x]$ степени n не больше n вещественных корней.

3. Докажите, что если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ задают одну и ту же функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то они равны как многочлены (т. е. покоэффициентно совпадают).

---

4. Дан многочлен $f(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_1x + a_0$ с вещественными коэффициентами. Известно, что $f(1) = f(-1)$, $f(2) = f(-2)$, $f(3) = f(-3)$, $f(4) = f(-4)$, $f(5) = f(-5)$. Докажите, что все коэффициенты при нечётных степенях равны нулю.

5. Какое наибольшее число общих точек может быть у графика кубического многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и окружности?

6. В памяти Бориса хранятся 100 вещественных чисел. Борис увеличил все числа на 1 и обнаружил, что их произведение не изменилось. Он снова увеличил все числа на 1, и опять произведение не изменилось, и так далее. Всего Борис повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение не менялось. При каком наибольшем k такое возможно?

7. Дан кубический многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Тройка $\{a, b, c\}$ различных вещественных чисел называется *циклической*, если $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$.
   (а) Докажите, что не бывает 9 различных циклических троек.
   (б) Докажите, что не бывает 4 различных циклических троек с одинаковой суммой.

8. Множество из 2000 последовательных натуральных чисел назовём *подозрительным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что существует лишь конечное число подозрительных множеств.

9. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие условию: для любых ненулевых вещественных чисел a, b, c, связанных соотношением $ab = ac + bc$, выполнено $\dfrac{1}{P(a)} + \dfrac{1}{P(b)} = \dfrac{1}{P(c)}$.