

Индукция в графах

1. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза
2. Дан набор из n натуральных чисел. Сумма всех чисел равна $2n - 2$. Докажите, что существует дерево, для которого набор степеней вершин совпадает с данным набором.
3. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.
4. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в любую другую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).
5. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем ладейно связным, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.
6. В полном графе 2020 вершин. В какое минимальное число цветов можно покрасить рёбра так, чтобы не было монохромных циклов?
7. В связном графе n вершин. В каждой из них лежит некоторое количество монет, в сумме kn . За один ход разрешается переложить некоторое количество монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что из любого расположения монет можно разложить монеты поровну во все вершины не более чем за $n - 1$ ходов.
8. В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа: КСБ и КБС. Докажите, что разность количеств городов разных типов делится на 4.