Гомотетия

1. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены квадраты. Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и взята произвольная точка P. Через точку A провели прямую ℓ_a, параллельную прямой PA_1. Аналогично определяются прямые ℓ_b и ℓ_c. Докажите, что прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c пересекаются в одной точке.

3. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Секущая пересекает окружности в точках M, N, P и Q (точки расположены на секущей в указанном порядке). Докажите, что $\angle MAP = \angle NAQ$.

4. В угол с вершиной в точке O вписаны окружности ω_1 и ω_2. Луч, выходящий из вершины угла, пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D, причем точки идут в порядке A—C—B—D. Касательная в точке B к окружности ω_1 пересекается с касательной в точке C к окружности ω_2 в точке P. Докажите, что $PB = PC$.

5. Окружности S_1 и S_2, касающиеся внешним образом в точке L, вписаны в угол BAC. Окружность S_1 касается луча AB в точке E, а окружность S_2 — луча AC в точке M. Прямая EL пересекает повторно окружность S_2 в точке Q. Докажите, что $MQ \parallel AL$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки M и N такие, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.

8. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC, касаются некоторой фиксированной окружности.

9. В углы треугольника вписаны три окружности одинакового радиуса. Окружность S касается их внешним образом. Докажите, что центр S лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.