

Информация

1. Есть 100 гирек различных весов.
(а) За одну операцию можно взять любые две гири и узнать, какая из них тяжелее. За какое минимальное число операций удастся найти самую тяжёлую гирьку?
(б) За одну операцию можно взять любые две гири и узнать их суммарный вес. За какое минимальное число операций удастся узнать вес каждой из гирек?
2. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
3. Прямоугольный дачный кооператив разделен M горизонтальными и N вертикальными границами на $(M + 1) \times (N + 1)$ прямоугольных участков. Сотрудник земельного ведомства хочет выяснить площадь кооператива. Для этого он может только спрашивать у каких-то владельцев участков, чему равна площадь их участка. Какого наименьшего числа вопросов ему хватит?
4. У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1.$$

Комментарий. Мудрецам известно множество цветов в каждом из сундуков.

5. (а) Есть 3 мудреца, сидящих за круглым столом. После этого им случайным образом надевают на голову красный или синий колпак (все исходы равновероятны), после чего они пытаются угадать цвет своего колпака, видя все остальные. По команде "Гоп!" некоторые мудрецы называют цвет своего колпака. Если не все мудрецы промолчали, и никто не ошибся, они получают чек-дан с деньгами. С какой максимальной вероятностью они заберут с собой деньги?
(б) Тот же вопрос, если мудрецов 7.
Комментарий. Считаем, что стратегия мудрецов должна быть детерминированной. То есть каждый мудрец должен по цветам колпаков других мудрецов точно определить, что ему ответить (не допускается «с такой-то вероятностью отвечу так, а с такой-то – так».)
6. Фокуснику завязывают глаза, а зритель кладет в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие – орлом вверх, а какие – решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть её. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и отгадывает написанное зрителем число. Найдите все N , для которых у фокусника с ассистентом существует способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число.