Задачи про площадь

1. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

2. Докажите, что прямая, делящая пополам периметр и площадь треугольника, проходит через центр его вписанной окружности.

3. Точки X и Y являются серединами сторон AB и AC треугольника ABC, точка I — центр его вписанной окружности, а K — точка касания этой окружности со стороной BC. Биссектрисы внешних углов B и C пересекают прямую XY в точках P и Q соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника $PKQI$ в два раза меньше площади треугольника ABC.

4. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E, что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, $S_{ABC} = S_{AECD}$.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает отрезки AD и BC в точках N и K соответственно. Известно, что точка O лежит внутри треугольника AMB. Докажите, что четырехугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

7. На высоте CH прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Касательные из точек A и B, проведённые к окружности, пересекаются в точке P. Докажите, что касательная из P к окружности равна трети гипотенузы.

8. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b, c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов ω_1 и ω_2.

9. Дан правильный треугольник ABC, площадь которого равна 1, и точка P на его описанной окружности. Прямые AP, BP, CP пересекают соответственно прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.