Задачи про площадь

1. Докажите, что прямая, делящая пополам периметр и площадь треугольника, проходит через центр его вписанной окружности.

2. Точки X и Y являются серединами сторон AB и AC треугольника ABC, точка I — центр его вписанной окружности, а K — точка касания этой окружности со стороной BC. Биссектрисы внешних углов B и C пересекают прямую XY в точках P и Q соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника $PKQI$ в два раза меньше площади треугольника ABC.

3. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E, что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, $S_{ABC} = S_{AECD}$.

4. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает отрезки AD и BC в точках N и K соответственно. Известно, что точка O лежит внутри треугольника AMB. Докажите, что четырехугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

5. На высоте CH прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Касательные из точек A и B, проведённые к окружности, пересекаются в точке P. Докажите, что касательная из P к окружности равна трети гипотенузы.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b, c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов ω_1 и ω_2.

8. Дан правильный треугольник ABC, площадь которого равна 1, и точка P на его описанной окружности. Прямые AP, BP, CP пересекают соответственно прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

9. Из произвольной точки плоскости P опустили перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на стороны BC, AC, AB треугольника ABC соответственно. Докажите, что
$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2},$$
где O, R — центр и радиус (ABC).