

## Лемма Холла

**Лемма Холла.** Есть  $n$  девушек и несколько юношей. Известно, что каких бы  $k$  девушек ни выбрать, число знакомых им совокупности юношей не меньше  $k$ . Тогда все девушки могут выбрать по юноше из числа своих знакомых.

1. В каждой строке и каждом столбце шахматной доски стоит по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 не бьющих друг друга ладей.
2. (а) Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.  
(б) На шахматной доске отметили 33 клетки. Докажите, что в отмеченные клетки можно расположить 5 не бьющих друг друга ладей.
3. У Деда Мороза есть множество подарков для  $n$  школьников. У  $i$ -го школьника есть ровно  $a_i$  желаемых подарков из этого множества. Оказалось, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1.$$

Докажите, что Дед Мороз может дать каждому школьнику желаемый подарок.

4. Прямоугольник  $m \times n$  называется латинским прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до  $n$  так, что в каждом столбике и в каждой строчке все числа различны. Докажите, что латинский прямоугольник  $m \times n$  можно дополнить до латинского квадрата  $n \times n$ .
5. Имеется граф  $G$ , все вершины которого имеют степень  $2k$ . Докажите, что из него можно выкинуть некоторое количество ребер, чтобы в оставшемся графе степень каждой вершины была равна двум.
6. В некоторой стране каждый город соединен авиарейсами с не менее чем 40 и не более чем 70 другими. Докажите, что можно отменить несколько рейсов так, чтобы каждый город был соединен с не менее чем 20 и не более чем 50 другими.
7. (а) Таблица  $n \times n$  заполняется числами 0 и 1 так, что любые  $n$  клеток, никакие две из которых не содержатся в одной строке или в одном столбце, содержат хотя бы один ноль. Докажите, что существуют  $i$  строк и  $j$  столбцов, где  $i + j > n$ , пересечения которых состоят только из нулей.  
(б) Таблица  $n \times m$  заполняется числами 0 и 1 так, что любые  $k$  клеток, никакие две из которых не содержатся в одной строке или в одном столбце, содержат хотя бы один ноль. Докажите, что существуют  $i$  строк и  $j$  столбцов, где  $i + j > n + m - k$ , пересечения которых состоят только из нулей.