Лемма Холла

1. В каждой строке и каждом столбце шахматной доски стоит по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 не бьющих друг друга ладей.

2. На шахматной доске отметили 33 клетки. Докажите, что в отмеченные клетки можно расположить 5 не бьющих друг друга ладей.

3. У Деда Мороза есть множество подарков для n школьников. У i-го школьника есть ровно a_i желаемых подарков из этого множества. Оказалось, что
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1.$$
Докажите, что Дед Мороз может дать каждому школьнику желаемый подарок.

4. Прямоугольник $m\times n$ $(m\leqslant n)$ называется *латинским* прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждом столбике и в каждой строчке все числа различны. Докажите, что латинский прямоугольник $m\times n$ можно дополнить до латинского квадрата $n\times n$.

5. Имеется граф G, все вершины которого имеют степень $2k$. Докажите, что из него можно выкинуть некоторое количество ребер, чтобы в оставшемся графе степень каждой вершины была равна двум.

6. В некоторой стране каждый город соединен авиарейсами с не менее чем 40 и не более чем 70 другими. Докажите, что можно отменить несколько рейсов так, чтобы каждый город был соединен с не менее чем 20 и не более чем 50 другими.

7. Таблица $n\times m$ заполняется числами 0 и 1 так, что любые k клеток, никакие две из которых не содержатся в одной строке или в одном столбце, содержат хотя бы один ноль. Докажите, что существуют i строк и j столбцов, где $i+j>n+m-k$, пересечения которых состоят только из нулей.

8. У каждой из 100 девочек есть по 100 шариков; среди этих 10000 шариков есть по 100 шариков 100 различных цветов. Две девочки могут обменяться, передав друг другу по шарику. Они хотят добиться того, чтобы у каждой девочки было по 100 разноцветных шариков. Докажите, что они могут добиться этого такой серией обменов, чтобы любой шарик участвовал не более чем в одном обмене.