Как заставить работать Коши

Неравенство Коши. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные положительные числа. Тогда верно неравенство
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Полезные советы.

1. Разделение на части. Часто полезно разбивать слагаемые или множители на пары и применять неравенство Коши к каждой паре. Например, вместо $2a$ полезно писать $a + a$, и т.д.

2. Подстановка константы. Если есть ограничение на переменные вида $a + b + c = 1$, полезно использовать его, чтобы заменить константы на переменные. Например, чтобы сделать неравенство однородным.

1. Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, удовлетворяющих условию $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, докажите, что
$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

2. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что
$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geqslant a + b + c.$$

3. Для любых положительных x, y, z докажите неравенство
$$x^4 + y^4 + z^2 \geqslant \sqrt{8}xyz.$$

4. Для любых положительных a, b, c, d докажите неравенство
$$\frac{a + b + c + d}{abcd} \leqslant \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}.$$

5. Докажите, что $3a^2 + 3b^2 + c^2 \geqslant 2(ab + bc + ca)$ для любых вещественных a, b, c. В каких точках достигается равенство?

6. Докажите неравенство для положительных значений переменных
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e).$$

7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что
$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right).$$