

Как заставить работать Коши

Полезные советы.

1. Разделение на части. Часто полезно разбивать слагаемые или множители на пары и применять неравенство Коши к каждой паре. Например, вместо $2a$ полезно писать $a + a$, и т.д.

2. Подстановка константы. Если есть ограничение на переменные вида $a + b + c = 1$, полезно использовать его, чтобы заменить константы на переменные. Например, чтобы сделать неравенство однородным.

3. Обратное неравенство Коши. Иногда, применяя неравенство Коши и вроде бы делая все верно, выясняется, что знак неравенства не сходится, хотя правая часть получается. В таком случае полезно сменить знак перед слагаемыми: например, вместо $\frac{1}{1+a}$ написать $1 - \frac{a}{1+a}$. Тогда знак получится правильным.

1. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq a + b + c.$$

2. Положительные числа x, y и z таковы, что $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

3. Пусть a, b и c — положительные числа, такие, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

5. Пусть a, b и c — положительные числа, такие, что $ab + bc + ca = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{2a+b^2} + \frac{b}{2b+c^2} + \frac{c}{2c+a^2} \leq 1.$$

6. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leq 8.$$

7. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}.$$

8. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$