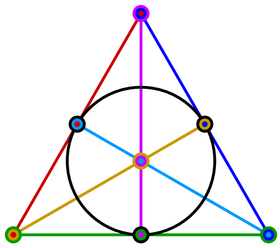
# Усреднение

**1.** В 7 вершинах расставлены числа. Известно, что сумма любых трех, лежащих на одной прямой или на отмеченной окружности, положительна. Может ли сумма всех чисел быть отрицательна?



**2.** Резиденты детского сада в последний месяц пристрастились к поеданию шоколадных батончиков Twix. Батончик Twix состоит из двух шоколадных палочек. По правилам поедания Twix одну палочку нужно съёсть самому, а вторую скормить другому ребёнку. За месяц силами 30 детсадовцев было уничтожено 900 Twix'ов. Докажите, что можно выделить подгруппу из 6 детей, внутри которой было съедено не менее 32 Twix'ов.

**3.** Взяли две одинаковые шестерёнки с 60 зубьями, и у первой спилили 30 зубьев, а у второй — 40. Докажите, что шестерёнки можно наложить одну на другую так, что совпадут не менее 10 уцелевших зубьев. Является ли оценка точной?

**4.** Клетчатая доска $20 \times 20$ разрезана на фигурки $T$-тетрамино. Докажите, что можно разрезать доску по клеткам на две части прямолинейным разрезом так, чтобы повредить не более
**(а)** 7 **(б)** 6 тетраминошек.

**5.** На односторонней кольцевой дороге расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге вдоль движения так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Протяжённость дороги равна 25. Докажите, что полицейские могут перейти на требуемые места, пройдя в сумме расстояние, не большее 300.

**6.** На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.

**7.** Пусть $p$ — простое число, а числа $a_1$, ..., $a_p$ — целые. Докажите, что существует целое число $k$, такое, что числа $a_1 + k$, $a_2 + 2k$, ..., $a_p + pk$ дают не менее $p/2$ различных остатков по модулю $p$.