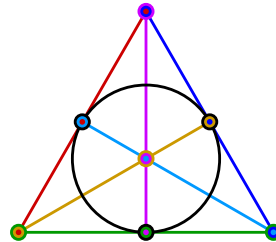


## Усреднение

1. В 7 вершинах расставлены числа. Известно, что сумма любых трех, лежащих на одной прямой или на отмеченной окружности, положительна. Может ли сумма всех чисел быть отрицательна?



2. Резиденты детского сада в последний месяц пристрастились к поеданию шоколадных батончиков Twix. Батончик Twix состоит из двух шоколадных палочек. По правилам поедания Twix одну палочку нужно съесть самому, а вторую скормить другому ребёнку. За месяц силами 30 детсадовцев было уничтожено 900 Twix'ов. Докажите, что можно выделить подгруппу из 6 детей, внутри которой было съедено не менее 32 Twix'ов.
3. Взяли две одинаковые шестерёнки с 60 зубьями, и у первой спилили 30 зубьев, а у второй — 40. Докажите, что шестерёнки можно наложить одну на другую так, что совпадут не менее 10 уцелевших зубьев. Является ли оценка точной?
4. Клетчатая доска  $20 \times 20$  разрезана на фигурки T-тетрамино. Докажите, что можно разрезать доску по клеткам на две части прямолинейным разрезом так, чтобы повредить не более
  - (а) 7
  - (б) 6 тетраминошек.
5. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.
6. Пусть  $p$  — простое число, а числа  $a_1, \dots, a_p$  — целые. Докажите, что существует целое число  $k$ , такое, что числа  $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$  дают не менее  $p/2$  различных остатков по модулю  $p$ .
7. На доске выписаны в ряд  $n$  положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Вася хочет выписать под каждым числом  $a_i$  число  $b_i \geq a_i$  так, чтобы для любых двух из чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$  отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n \leq 2^{(n-1)/2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$