

## Подобия

1. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внешним образом в точке  $P$ . Через центр  $\omega_1$  проведена прямая  $\ell_1$ , касающаяся  $\omega_2$ . Аналогично прямая  $\ell_2$  касается  $\omega_1$  и проходит через центр  $\omega_2$ . Оказалось, что прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  не параллельны. Докажите, что точка  $P$  лежит на биссектрисе одного из углов, образованных  $\ell_1$  и  $\ell_2$ .
2. Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $E$ . Пусть  $ET$  — высота треугольника  $ABE$ ,  $K$  — точка пересечения прямых  $DT$  и  $AE$ ,  $M$  — точка пересечения прямых  $CT$  и  $BE$ . Докажите, что отрезок  $KM$  — сторона квадрата, вписанного в треугольник  $ABE$ .
3. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Точка  $K$  — проекция точки  $C_1$  на прямую  $A_1B_1$ . Докажите, что  $KC_1$  — биссектриса угла  $AKB$ .
4.  $AB$  и  $CD$  — отрезки, лежащие на двух сторонах угла ( $O$  — вершина угла,  $A$  лежит между  $O$  и  $B$ ,  $C$  — между  $O$  и  $D$ ). Через середины отрезков  $AD$  и  $BC$  проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках  $M$  и  $N$  ( $M$ ,  $A$  и  $B$  лежат на одной стороне угла;  $N$ ,  $C$  и  $D$  — на другой). Докажите, что  $OM : ON = AB : CD$ .
5. В прямоугольнике  $ABCD$  опущен перпендикуляр  $BK$  на диагональ  $AC$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AK$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что угол  $BMN$  — прямой.
6. Дан вписанный четырёхугольник  $ABCD$ . Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Пусть  $K$  и  $N$  — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов  $PKQ$  и  $PNQ$  равна  $180^\circ$ .
7. Точка  $M$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ . На отрезках  $AM$  и  $CM$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  соответственно таким образом, что  $2PQ = AC$ . Описанная окружность треугольника  $ABQ$  второй раз пересекает сторону  $BC$  в точке  $X$ , а описанная окружность треугольника  $BSP$ , второй раз пересекает сторону  $AB$  в точке  $Y$ . Докажите, что четырёхугольник  $VXMY$  — вписанный.
8. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  отмечена точка  $K$ . В треугольники  $ABK$  и  $ACK$  вписаны окружности, первая касается стороны  $BC$  в точке  $M$ , вторая — в точке  $N$ . Докажите, что  $BM \cdot CN > KM \cdot KN$ .