Подобия

1. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1, касающаяся ω_2. Аналогично прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 не параллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E. Пусть ET — высота треугольника ABE, K — точка пересечения прямых DT и AE, M — точка пересечения прямых CT и BE. Докажите, что отрезок KM — сторона квадрата, вписанного в треугольник ABE.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка K — проекция точки C_1 на прямую A_1B_1. Докажите, что KC_1 — биссектриса угла AKB.

4. AB и CD — отрезки, лежащие на двух сторонах угла (O — вершина угла, A лежит между O и B, C — между O и D). Через середины отрезков AD и BC проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках M и N (M, A и B лежат на одной стороне угла; N, C и D – на другой). Докажите, что $OM : ON = AB : CD$.

5. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN — прямой.

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна $180°$.

7. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $2PQ = AC$. Описанная окружность треугольника ABQ второй раз пересекает сторону BC в точке X, а описанная окружность треугольника BCP, второй раз пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.

8. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка K. В треугольники ABK и ACK вписаны окружности, первая касается стороны BC в точке M, вторая — в точке N. Докажите, что $BM \cdot CN > KM \cdot KN$.