 Лычагина Е. А., Соколов А. А.

Увидеть граф

1. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет – всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

2. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

3. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку.
(а) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.
(б) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

4. Муравей ползает по поверхности кубика $11 \times 11 \times 11$ вдоль диагоналей квадратиков 1×1 (поворачивать в центре клетки нельзя). Могло ли так оказаться, что он побывал в центре каждого квадратика ровно один раз?

5. В каждой клетке таблицы $n \times n$ написано одно из чисел 0, 1 или -1 так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одно число 1 и ровно одно число -1. Разрешается поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице заменились на противоположные.

6. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ как минимум 37 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ – целые.

7. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

8. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо 17 человек, либо 20. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?