

Неравенства с дробями

Полезные советы.

1. Чтобы дроби было легче складывать, их знаменатели полезно переобозначить новыми переменными.

2. Удобнее всего складывать дроби с одинаковыми знаменателями. Чтобы выровнять знаменатели, полезно округить их. Чаще всего общим знаменателем оказывается сумма переменных, фигурирующих в условии.

1. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1.$$

2. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

4. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

5. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 , каждое из которых больше единицы, равна S , причем

$$\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S \quad \text{для всех } i = 1, 2, 3.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

6. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

для вещественных чисел $x, y, z \neq 1$, удовлетворяющих условию $xuz = 1$.

7. Известно, что числа x, y, z удовлетворяют неравенствам $0 \leq x, y, z \leq 1$. Докажите, что

$$\frac{xy}{z + xy + xyz} + \frac{yz}{x + yz + xyz} + \frac{zx}{y + xz + xyz} \leq 1.$$

8. Пусть a, b, c — положительные числа, такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4.$$

Докажите, что

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$