Неравенства с дробями

Полезные советы.

1. Чтобы дроби было легче складывать, их знаменатели полезно переобозначить новыми переменными.

2. Удобнее всего складывать дроби с одинаковыми знаменателями. Чтобы выровнять знаменатели, полезно огрубить их. Чаще всего общим знаменателем оказывается сумма переменных, фигурирующих в условии.

1. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

2. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

3. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

4. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем

$$\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S \quad \text{для всех } i = 1, 2, 3.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

5. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

для вещественных чисел $x, y, z \neq 1$, удовлетворяющих условию $xyz = 1$.

6. Известно, что числа x, y, z удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{xy}{z + xy + xyz} + \frac{yz}{x + yz + xyz} + \frac{zx}{y + xz + xyz} \leqslant 1.$$

7. Пусть a, b, c — положительные числа, такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4.$$

Докажите, что

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3.$$