Вписанные углы

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает BC в точке D. Докажите, что $PD \parallel AB$.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямые l_1 и l_2, проходящие через точки A и B соответственно, пересекают первую окружность в точках M и N, а вторую — в точках P и Q. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

3. На хорде AB окружности Ω с центром в точке O отмечена точка X. Описанная окружность треугольника AXO пересекает окружность Ω в точках A и Y, причём точки O и Y лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что $XY = XB$.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90°, AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD. Отрезки BF и AC пересекаются в точке L. Докажите, что $BC = CL$.

5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника ADB, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN. Докажите, что $OD \perp BC$.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает отрезок AC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

7. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне AC точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге BC окружности Ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180°$.