

Вписанные углы

1. На хорде AB окружности Ω с центром в точке O отмечена точка X . Описанная окружность треугольника AHO пересекает окружность Ω в точках A и Y , причём точки O и Y лежат по разные стороны от прямой AB . Докажите, что $XY = XB$.
2. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P , а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает BC в точке D . Докажите, что $PD \parallel AB$.
3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD . Отрезки BF и AC пересекаются в точке L . Докажите, что $BC = CL$.
4. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Из произвольной точки P дуги AB опущены перпендикуляры PI , PQ , PR на AB , AC , BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника PQR .
5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника ADB , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ADC , пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN . Докажите, что $OD \perp BC$.
6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1 . Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K . Перпендикуляр из B на AK пересекает отрезок AC в точке L . Докажите, что точки K , L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.
7. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка D , а на стороне AC точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге BC окружности Ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180^\circ$.