Многочлены

1. Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

2. Последовательность многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ удовлетворяет равенствам $P_1(x) = x$ и $P_{n+1}(x) = P_n(x-1)P_n(x+1)$. Найдите наибольшее натуральное k, для которого $P_{2021}(x)$ делится на x^k.

3. Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

4. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2019}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x) + 2021$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 13.

6. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами. Докажите, что найдется целое число k такое, что числа $P(k), P(k+1), \ldots, P(k+2021)$ — составные.

7. Дано натуральное число k.
(а) Докажите, что найдется такое n и расстановка знаков, что $1^k \pm 2^k \pm \ldots \pm n^k = 0$.
(б) Для каждого натурального m обозначим через $f(m)$ наименьшее значение выражения $|1^k \pm 2^k \pm \ldots \pm m^k|$ по всем расстановкам знаков. Докажите, что функция $f(m)$ периодична, начиная с некоторого места.