

Диагностическая работа

1. На острове, население которого составляют только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, находится НИИ (научно-исследовательский институт). Каждый из его сотрудников однажды сделал два заявления:
(1) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня.
(2) По крайней мере сто человек в институте получают зарплату большую, чем моя.
Известно, что нагрузка у всех работников разная, как и зарплата. Сколько человек работает в НИИ?
2. Доска 8×8 покрашена в белый цвет. Павел и Вадим ходят по очереди, начинает Павел. В свой ход игрок перекрашивает белую клетку в черный цвет. Игрок проигрывает, если после его хода на доске впервые нельзя выбрать две соседние по стороне белые клетки. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты неравностороннего остроугольного треугольника ABC , M — середина AB . Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 пересекают прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что K , M и L лежат на одной прямой.
4. Вещественные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что

$$(1 - a)(1 - b) \geq cd.$$

5. Докажите, что
(а) (2 балла) уравнение $x^4 + y^2 = z^2$;
(б) (5 баллов) уравнение $x^4 + y^6 = z^{10}$
имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
6. На железной дороге Москва-Владивосток имеется 200 остановок (включая конечные). Поезда от Москвы до Владивостока ходят так, что для любых двух остановок существует поезд, останавливающийся на них, но не останавливающийся между ними. Какое наименьшее количество поездов может ходить по маршруту Москва-Владивосток?