Диагностическая работа. Решения

1. На острове, население которого составляют только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, находится НИИ (научно-исследовательский институт). Каждый из его сотрудников однажды сделал два заявления:
(1) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня.
(2) По крайней мере сто человек в институте получают зарплату большую, чем моя.
Известно, что нагрузка у всех работников разная, как и зарплата. Сколько человек работает в НИИ?

Ответ: 110.

Решение. Заметим, что для человека, проработавшего дольше всех, утверждение (1) является истинным, откуда следует, что в НИИ есть хотя бы один рыцарь. Более того, чтобы для рыцаря утверждение (2) было верно, в НИИ должен работать хотя бы 101 сотрудник.

Далее, расставим сотрудников в порядке убывания опыта работы. Тогда рыцарями являются первые десять человек.

Теперь расставим сотрудников в порядке возрастания зарплаты. Тогда рыцарями являются все, кроме последних ста человек.

Так как в обоих случаях число рыцарей одинаково, то мгновенно получаем, что сотрудников в НИИ работает 110.

2. Доска 8×8 покрашена в белый цвет. Павел и Вадим ходят по очереди, начинает Павел. В свой ход игрок перекрашивает белую клетку в черный цвет. Игрок проигрывает, если после его хода на доске впервые нельзя выбрать две соседние по стороне белые клетки. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: выигрывает Вадим. Чтобы доказать это, приведем выигрышную стратегию.
Решение 1. Разобьем доску на вертикальные домино. Стратегия Вадима: если Павел закрашивает одну из клеток домино, то Вадим закрашивает оставшуюся клетку этого же домино. Ход Вадима всегда допустим, так как после его хода на доске остается несколько целиком белых домино. Через 62 хода на доске останется лишь две соседние белые клетки, и своим следующим ходом Павел проиграет.
Решение 2. Заметим, что перед любым ходом Вадима будет совершено нечетное число ходов, и поэтому на доске будет нечетное число черных и белых клеток. Стратегия Вадима: Перед своим ходом Вадим мысленно выбирает целиком белое домино (такое домино найдется, иначе игра уже закончена), и закрашивает любую другую оставшуюся белую клетку. Такая найдется, так как перед ходом Вадима не могло остаться ровно две клетки по соображениям четности. Таким образом, мы привели стратегию, согласно которой Вадим всегда может сделать ход так, чтобы не проиграть. Нетрудно понять, что игра конечна, так что Вадим победит.

3. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, M — середина AB. Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 пересекают прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M и L лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что треугольники $\triangle ABA_1$ и $\triangle ABB_1$ прямоугольные, поэтому $MA_1 = MB_1 =$

$MA = MB = \frac{1}{2}AB$. Докажем, что точки и L лежат на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1, откуда будет следовать условие задачи. Поскольку четырехугольник KA_1MA вписанный по условию, и $A_1M = MA$, то KM — биссектриса угла A_1KM. Также $\angle KA_1M = 180° - \angle\angle BAC = 180° - \angle MB_1A = \angle MB_1C$. Таким образом получаем, что у трегольников $\triangle KA_1M$ и $\triangle KB_1M$ равны все углы и общая сторона KM, значит эти треугольники равны. Тогда $KA_1 = KB_1$. Аналогично получаем, что $LA_1 = LB_1$.

4. Вещественные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что

$$(1 - a)(1 - b) \geqslant cd.$$

Решение. По неравенству о средних $cd \leqslant \frac{c^2+d^2}{2} = \frac{1-a^2-b^2}{2}$, поэтому достаточно доказать, что $(1 - a)(1 - b) \geqslant \frac{1-a^2-b^2}{2}$. Действительно, после домножения на 2 и переноса всех слагаемых в левую часть получаем неравенство $2(1 - a)(1 - b) - (1 - a^2 - b^2) = 2 - 2a - 2b + 2ab - 1 + a^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b - 2ab = (a + b - 1)^2 \geqslant 0$, которое является верным.

5. Докажите, что
(а) (2 балла) уравнение $x^4 + y^2 = z^2$;
(б) (5 баллов) уравнение $x^4 + y^6 = z^{10}$
имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение. (а) Любая тройка вида $(x = 2k, y = 3k^2, z = 5k^2)$ является решением.

(b) Любая тройка вида $(x = 2 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12} \cdot k^{15}, y = 3^7 \cdot 5^8 \cdot k^{10}, z = 3^4 \cdot 5^5 \cdot k^6)$ является решением. Действительно, $x^4 + y^6 = 2^4 \cdot 3^{40} \cdot 5^{48} \cdot k^{60} + 3^{42} \cdot 5^{48} \cdot k^{60} = (2^4 + 3^2) \cdot 3^{40} \cdot 5^{48} \cdot k^{60} = 3^{40} \cdot 5^{50} \cdot k^{60} = z^{10}$.

6. На железной дороге Москва-Владивосток имеется 200 остановок (включая конечные). Поезда от Москвы до Владивостока ходят так, что для любых двух остановок существует поезд, останавливающийся на них, но не останавливающийся между ними. Какое наименьшее количество поездов может ходить по маршруту Москва-Владивосток?

Ответ: 10000.
Оценка. Пронумеруем остановки по порядку числами от 1 до 200. Рассмотрим произвольную пару остановок, где первая остановка имеет номер от 1 до 100, а вторая — от 101 до 200, и найдем поезд, который останавливается на двух выбранных остановках и не останавливается нигде между ними. Заметим, что никакие два выбранных таким образом поезда не совпадает, а так как всего таких пар остановок 100^2, то и поездов должно быть не менее 10000.
Пример. Для каждой пары остановок с номерами i, j такими, что $i \leqslant 100, j > 100$, пустим поезд, который останавливается на обеих этих остановках, а также на всех остальных остановках, номер которых сравним с i и j по модулю $j - i$. Всего мы пустили 10000 поездов. Рассмотрим теперь произвольную пару остановок с номерами $a < b$. Заметим, что найдутся такие i, j, что $1 \leqslant i \leqslant 100 < j \leqslant 200$ и $j - i = b - a$. Поезд, который мы пустили через i и j, проходит через a и b и не останавливается нигде между a и b.