Диагностическая работа. Решения

1. Назовём девятизначное число *хорошим*, если в нём все цифры от 1 до 9 встречаются ровно один раз. Все хорошие девятизначные числа выписали в порядке возрастания. Укажите два средних числа в этой последовательности.

   Решение. *Ответ:* 549876321, 561234789.

   Разобьём все хорошие числа на *маленькие* и *большие* следующим образом. Если первая цифра хорошего числа больше 5, то это число относим к большим, если меньше – то к маленьким. Если же первая цифра равна пяти, то мы относим число к большим или маленьким в зависимости от второй цифры: если она больше 5, то число большое, если меньше 5 – то маленькое (а ровно 5 уже не может быть).

   Как видим, любое большое хорошее число больше любого маленького.

   Если в большом хорошем числе каждую цифру заменить на «10 минус эта цифра» (9 на 1, 8 на 2 и т.д.), то получится маленькое хорошее число, и наоборот. Значит, больших и маленьких хороших чисел поровну.

   Отсюда получаем, что средние числа в нашей последовательности – это наибольшее маленькое число и наименьшее большое число. Ясно, что наибольшее маленькое число – это 549876321, а наименьшее большое – это 561234789.

2. В треугольнике ABC проведены высоты AH и CP. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2PH$. Ответ дайте в градусах.

   Решение. *Ответ:* 60.

   Заметим, что $AC/2 = PH = PM = HM$, так как PM и HM — медианы в прямоугольных треугольниках APC и AHC. Поэтому треугольник PHM равносторонний, и $\angle PMH = 60°$. Треугольник AMP — равнобедренный с основанием AP, поэтому $\angle AMP = 180° - 2\angle A$. Аналогично, $\angle HMC = .180° - 2\angle C$ из равнобедренного треугольника HMC с основанием HC. Заметим, что $180° = \angle AMP + \angle PMH + \angle HMC = 180° - 2\angle A + 60° + 180° - 2\angle C = 60° + 2(180° - \angle A - \angle C) = 60° + 2\angle B$. Следовательно, $\angle B = 60°$.

3. Перед вами коробка, в которой лежат 100 футболок трёх различных цветов. Вам известно, что если наугад вытащить из коробки 25 футболок, то среди них обязательно найдётся 11 одноцветных футболок. От вас требуют, чтобы вы вытащили из коробки наугад несколько футболок. Если среди них не будет 30 одноцветных, вас казнят. Какое наименьшее число футболок вам надо вытащить, чтобы гарантированно избежать казни?

   Решение. *Ответ:* 63.

   Будем обозначать цвета наших футболок через A, B и C.

   Ключевое соображение. Пусть мы вытащили 25 футболок. Зададимся таким вопросом: при каком количестве футболок цвета A среди этих 25 можно гарантировать, что среди оставшихся вытащенных футболок будет либо 11 цвета B, либо 11 цвета C? Как видим, если футболок цвета A не больше 4 штук, то по принципу Дирихле мы сможем это гарантировать. Если же футболок цвета A не меньше 5 штук, то мы этого гарантировать не сможем.

Из этого соображения угадывается ответ и придумывается написанное ниже решение.

Собственно, решение задачи. Приведём пример, когда 62 футболок может не хватить. Пусть в коробке лежало 4 футболки цвета A и по 48 футболок цветов B и C. Условие задачи выполнено: если вытащить 25 футболок, то по соображению выше среди них найдётся либо 11 цвета B, либо 11 цвета C. Теперь, если мы вытаскиваем 62 футболки, то среди них может оказаться 4 цвета A и по 29 цветов B и C – нет 30 одноцветных.

Докажем, что если вытащить 63 футболки, то среди них обязательно найдётся 30 одноцветных. Разберём два случая.

Пусть найдётся такой цвет (не умаляя общности, цвет A), что среди вытащенных 63 футболок есть не больше четырёх футболок этого цвета. Тогда по принципу Дирихле из остальных $\geqslant 59$ вытащенных футболок найдётся либо 30 цвета B, либо 30 цвета C.

Теперь пусть среди вытащенных футболок есть хотя бы 5 футболок каждого цвета. Допустим, что каждого цвета вытащено не больше 29. Тогда, в частности, футболок цвета C вытащено не больше 29. По принципу Дирихле из остальных $\geqslant 34$ вытащенных футболок найдётся либо 17 цвета B, либо 17 цвета A (не умаляя общности, пусть найдётся 17 цвета B). Ну а футболок цвета A по нашему предположению вытащено не меньше 5. Но тогда заметим, что найдётся набор из 25 футболок с соотношением цветов 5-10-10 – в этом наборе нет 11 одноцветных футболок. Противоречие – значит, одно из цветов вытащено не меньше 30.

4. Вася задумал натуральное число n, выписал все его натуральные делители, кроме самого числа n, и сложил два наибольших из них. Получилось число 77. Какое число задумал Вася?

Решение. *Ответ:* 110.

Обозначим два наибольших делителя числа n, отличных от самого n, через a и b, пусть $a > b$. Так как $a + b = 77$ – нечётное число, то ровно одно из чисел a и b чётно. Получается, что у n есть чётный делитель, а значит, n чётно. Тогда мы можем сказать, что $a = n/2$.

Если n делится на 3, то $b = n/3$. Тогда имеем $n/2 + n/3 = 77$; $5n = 77 \cdot 6$, что невозможно, так как $77 \cdot 6$ не делится на 5.

Если n не делится на 3, но делится на 4, то $b = n/4$. Тогда имеем $n/2 + n/4 = 77$; $3n = 77 \cdot 4$, что невозможно, так как $77 \cdot 4$ не делится на 3.

Пусть теперь n не делится на ни 3, ни на 4. Легко видеть, что тогда b имеет вид n/p, где $p > 3$ – простое. Имеем $n/2+n/p = 77$; $n(p+2) = 77\cdot 2p$. Так как p – простое и нечётное, то $2p$ взаимно просто с $p + 2$, следовательно, 77 делится на $p + 2$. Но у числа 77 не так много делителей – это 77, 11, 7 и 1. Получаем, что p – это либо 75, либо 9, либо 5. Но так как p – простое, то остаётся только вариант $p = 5$. Получаем $n/2 + n/5 = 77$; $n = 110$.

Проверим что число 110 в самом деле подходит: его наибольшие делители – это 55 и 22, имеем $55 + 22 = 77$.

Замечание. Чтобы попытаться *угадать ответ* в этой задаче, не обязательно проводить это рассуждение до конца: можно рассмотреть случай «n не делится на 3 и 4, но делится на 5» – и тогда мы бы наткнулись на число 110. Но так мы бы, конечно, не доказали, что других вариантов нет.

5. Дано натуральное число n. Известно, что числа n и $n+1989$ – пятизначные. Сумма цифр числа n равна 39, а сумма цифр числа $n + 33$ равна 9. Чему равна сумма цифр числа $n + 1989$?

Решение. *Ответ:* 30.

Посмотрим, как могло происходить сложение в столбик чисел n и 33. Мы знаем, что сумма цифр числа $n+33$ на 30 больше суммы цифр числа n, при этом оба числа n и $n+33$ пятизначные. Цифра в старшем разряде числа n при добавлении 33 не может уменьшиться, но при этом хотя бы четыре цифры должны были уменьшиться (иначе сумма цифр уменьшилась бы не более, чем на $9 \cdot 3 = 27$). Следовательно, в каждом из четырёх младших разрядов имел место переход через разряд. Отсюда вторая и третья цифры числа n равны девяти, последняя цифра не меньше семи, а предпоследняя – не меньше шести.

Хотя мы и не можем определить число n однозначно, но полученной информации нам достаточно, чтобы найти сумму цифр числа $n+1989$. Заметим, что $n+1989 = n-11+2000$. При вычитании 11 из n первые три цифры числа n не поменяются, а последние две уменьшатся на 1. Далее, при прибавлении 2000 первая цифра увеличится на 1, вторая цифра из девятки превратится в единичку. Итого, как видим, сумма цифр уменьшилась на 9, то есть сумма цифр числа $n+1989$ равна $39-9=30$.

6. В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AB и BC отметили точки D и E, соответственно. Отрезки CD и AE пересекаются в точке M. Оказалось, что площадь треугольника AMC равна площади четырехугольника $DBEM$. Найдите угол AMD. Ответ дайте в градусах.

Решение. *Ответ:* 60.

Заметим, что $S_{BDC} = S_{DBEM} + S_{EMC} = S_{AMC} + S_{EMC} = S_{AEC}$. Тогда $\frac{1}{2}\sin(\angle B) \cdot BD \cdot BC = \frac{1}{2}\sin(\angle C) \cdot CE \cdot AC$. Так как треугольник ABC равносторонний, $\angle B = \angle C$ и $BC = AC$, следовательно, из предыдущего равенства $BD = CE$. Треугольники BDC и CEA равны по двум сторонам и углу между ними, тогда $\angle BDC = \angle AEC = 180° - \angle BEM$, из чего следует вписанность четырёхугольника $DBEM$. Значит, $\angle AMD = \angle B = 60°$.

7. Дан некоторый приведенный квадратный трехчлен, имеющий два различных целых корня. Известно, что один из корней, а также значение в точке $x = 11$ являются положительными простыми числами. Найдите свободный член данного трехчлена.

Решение. *Ответ:* 156.

Обозначим через a и b корни нашего квадратного трехчлена. Тогда приведенный квадратный трехчлен имеет вид $f(X) = (x-a)(x-b)$. По условию один из корней является простым числом, не умаляя общности, мы можем считать, что a — простое число. Далее, простым числом является $f(11) = (11-a)(11-b)$. Рассмотрим два случая.

1. $a = 2$. В этом случае $f(11) = 9(11-b)$, из чего следует, что $f(11)$ не является простым. Противоречие.
2. a — нечетное простое число. В этом случае $11-a$ — четное число. Тогда $f(11)$ — четное простое число, откуда $f(11) = 2$. Следовательно, $|11-a| = 2$, откуда для a есть два варианта: 9 и 13. Но 9 не подходит под условие простоты корня a.

А из равенства $2 = f(11) = (11-13)(11-b)$ мы получаем, что $b = 12$. Таким образом, искомый трехчлен равняется $(x-12)(x-13) = x^2 - 25x + 156$. Свободный член данного трехчлена равен 156.

8. По кругу стоит 2021 лампочка. Изначально все лампочки потушены. За ход разрешается зажечь лампочку, если две соседние лампочки либо обе зажжены, либо обе потушены. Какое наибольшее число лампочек можно зажечь таким образом?

Решение. *Ответ:* 2019.

Способ зажечь 2019 лампочек: зажигаем сначала лампочки с номерами $1, 3, 5, \ldots, 2019$. Это действительно возможно, так как обе соседние лампочки потушены. Далее, зажигаем лампочки с номерами $2, 4, \ldots, 2018$. Это же возможно, так как обе соседние лампочки уже горят.
Покажем, что зажечь больше 2019 лампочек невозможно. Рассмотрим следующую величину: количество пар соседних лампочек таких, что в паре горят обе лампочки. Изначально таких пар 0. Если мы зажигаем лампочку, у которой две соседние лампочки потушены, то величина не изменяется. А если мы зажигаем лампочку, у которой две соседние лампочки уже горят, то величина увеличивается на 2. Таким образом, величина не меняет своей четности.
Изначально величина равно нулю (все лампочки потушены). Если горят 2020 или 2021 лампочка, то величина равна 2019 и 2021 соответственно. Оба этих числа нечетны. Значит, мы не можем получить больше 2019 лампочек, так как иначе должна смениться четность величины, а в предыдущем параграфе мы доказали, что четность величины не меняется.

9. Караван состоит из 12 верблюдов. Вес первого верблюда равен 300 кг, а последнего — 575 кг. Каждый верблюд в караване, кроме первого и последнего, весит на 10 кг легче среднего арифметического весов двух своих соседей. Сколько весит второй верблюд каравана? Ответ дайте в кг.

Решение. *Ответ:* 225.

Обозначим через a_k вес k-го верблюда в караване. Рассмотрим последовательность $b_i = a_i - a_1 = a_i - 300$. Заметим, если $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} - 10$, то это же равенство верно и для последовательности b_i: $b_k = \frac{b_{k-1}+b_{k+1}}{2} - 10$. При этом $b_1 = a_1 - a_1 = 0$.
Далее, раз $b_2 = \frac{b_1+b_3}{2} - 10 = \frac{b_3}{2} - 10$, то $b_3 = 2b_2 + 20$. Аналогично, $b_3 = \frac{b_2+b_4}{2} - 10$, откуда $b_4 = 2b_3 - b_2 + 20 = 3b_2 + 60$. Действуя аналогично, получаем равенства $b_5 = 4b_2 + 120$ и $b_6 = 5b_2 + 200$. Напрашивается формула $b_k = (k-1)b_2 + 10(k-1)(k-2)$. Докажем ее.
Действительно, формула верна $k = 1$ и $k = 2$. Проверим формулу для $k = l > 2$:
$b_l = -b_{l-2} + 2b_{l-1} + 20 = -\big((l-3)b_2) + 10(l-3)(l-4)\big) + 2\big((l-2)b_2) + 10(l-2)(l-3)\big) + 20 = \big(3 - l + 2(l-2)\big)a_2 + 10\big(2(l-2)(l-3) - (l-3)(l-4) + 2\big) = (l-1)b_2 + 10(l-1)(l-2)$. Формула доказана.
Таким образом, $575 - 300 = 275 = b_{12} = 11b_2 + 1100$, откуда получаем, что $b_2 = -75$. Следовательно, $a_2 = 300 + b_2 = 225$, что и требовалось доказать.

10. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Биссектриса угла $\angle ACB$ пересекают прямую AB в точке L, а описанную окружность треугольника ABC в точке D. Пусть $LI = 12$ и $LD = 16$. Найдите IC.

Решение. *Ответ:* 21.

Точки A, B, C, D лежат на одной окружности и CD — биссектриса угла ACB, поэтому $\angle BAD = \angle BCD = \angle ACD$. Тогда описанная окружность треугольника ACL касается прямой AD в точке A, а степень точки D относительно этой окружности равна $DA^2 = DL \cdot DC$. По лемме о трезубце $DA = DI$, поэтому $DI^2 = DL \cdot DC = DL(DI + IC)$. Значит, $IC = \frac{DI^2 - DL \cdot DI}{DL}$. Подставляя в эту формулу значения $DL = 16$ и $DI = DL + LI = 28$, получаем $IC = 21$.

11. Действительные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 + ab + 2 = 4a + 4b$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^2 + b^2$?

Решение. *Ответ:* 12.

Ответ достигается при паре $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.
Доказательство максимальности: $0 \leqslant (a + b - 4)^2 = a^2 + b^2 + 16 - 2ab - 8a - 8b = 2(a^2 + b^2 + ab + 2 - 4a - 4b) - a^2 - b^2 + 12 = 12 - a^2 - b^2$, откуда следует, что $a^2 + b^2 \leqslant 12$.