Векторы и скалярное произведение

1. В пятиугольнике $ABCDE$ точки M, N, K, L — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, P и Q — середины отрезков MK и NL соответственно. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и найдите отношение $PQ : AE$.

2. **(а)** Пусть A, B, C и D — произвольные точки плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

   (б) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3. Дана окружность ω с диаметром AB и произвольная точка P. Докажите, что величина $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ равна степени точки P относительно ω.

4. В треугольнике ABC отметили центр описанной окружности O и ортоцентр H.

   (а) Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

   (б) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, где R, a, b, c — радиус описанной окружности и стороны треугольника.

5. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.
   (Да, эта задачка уже была. Попробуйте решить её, исходя из сегодняшней темы.)

6. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.

7. Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC. Докажите, что

   (а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$

   (б) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -\frac{3}{2}$

8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

9. На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точка каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовём точку финишной, если Коля может в неё попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе N найдётся начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно N различных возможных финишных точек?