Об одной задаче Л. Эйлера

Когда люди только начинали исследовать арифметические свойства натуральных чисел, они пытались придумать формулу для отыскания бесконечного множества простых чисел. Одним из наиболее известных примеров стал так называемый многочлен Эйлера: многочлен x^2+x+41 принимает простые значения при $x=0, 1, \ldots, 40$. Чуть менее известен многочлен $x^2-79x+1601$, принимающие простые значения при $x=0, 1, \ldots, 79$ и также придуманный Эйлером.

Как были придуманы эти примеры? Оказывается, их появление неслучайно, и Эйлер на самом деле сделал гораздо больше, чем придумал простую арифметическую игрушку. А именно, справедлива следующая

Теорема. Рассмотрим многочлен $f(x)=x^2+x+a$, где a — натуральное число. Предположим, что все числа $f(0), f(1), \ldots, f([\sqrt{a/3}])$ являются простыми. Тогда и все числа $f(0), f(1), \ldots, f(a-2)$ являются простыми.

Попробуем доказать эту теорему и порешать другие задачи вокруг нее.

1. Предположим, что существует такое натуральное число $k \leqslant a-2$, для которого число $f(k)$ составное. Будем считать k наименьшим среди таких чисел. Обозначим через q наименьший простой делитель числа $f(k)$.

   (а) Докажите, что $f(q-1-k)$ делится на q.

   (б) Докажите, что $f(q-1-k)$ составное.

   (в) Докажите, что $q \geqslant 2k$.

   (г) Докажите **теорему**.

2. Сформулируйте и докажите аналог **теоремы** для многочленов вида $f(x)=x^2-x+a$.

3. Докажите, что многочлен $f(x)=x^2-79x+1601$ принимает простые значения при всех $x=0, 1, \ldots, 79$.

   Указание. Возможно, стоит попытаться свести этот многочлен к многочлену $t^2 \pm t+41$...

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких, что наибольший простой делитель числа n^2+1 больше $2n$.

5. Пусть $p(n)$ — наибольший простой делитель числа n. Докажите, что существует бесконечно много троек (a, b, c), таких, что $p(a)=p(b)=p(c)$.

6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких, что наибольшие простые делители у чисел n^4+n^2+1 и $(n+1)^4+(n+1)^2+1$ совпадают.