Разнобой по алгебре

1. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c верно неравенство
$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}\geqslant\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.$$

2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых верно равенство $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=2200^{2200}$?

3. Докажите, что уравнение $3y^2=x^4+x$ не имеет натуральных решений.

4. Числа a, b, c, d положительные. Найти наименьшее значение выражения
$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^4+\left(\frac{b+c}{d}\right)^4+\left(\frac{c+d}{a}\right)^4+\left(\frac{d+a}{b}\right)^4.$$

5. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

6. Для положительных чисел x, y, z докажите, что
$$\frac{x-y}{xy+2y+1}+\frac{y-z}{yz+2z+1}+\frac{z-x}{zx+2x+1}\geqslant 0.$$

7. Найти наименьшую константу C, такую, что из любых положительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (не обязательно различных) можно выбрать четыре числа, таких, что $\left|\frac{a_k}{a_l}-\frac{a_m}{a_n}\right|\leqslant C$.

8. Пусть n — натуральное число, $a_1=n$ и a_k для каждого $k\geqslant 2$ выбирается так, что a_k — наименьшее целое число на отрезке $[0;k-1]$, такое, что $k\mid a_1+\ldots+a_k$. Докажите, что, начиная с некоторого момента, последовательность $\{a_k\}$ стабилизируется.

9. Найдите все такие составные числа n, что для любого разложения на два натуральных сомножителя $n=xy$ сумма $x+y$ является степенью двойки.

10. Для каких натуральных чисел $s\geqslant 4$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $s=a+b+c+d$ и $abc+abd+acd+bcd$ делится на s?

[Кружок в Хамовниках, 9 класс] Бибиков П.В.
[2021-2022] группы: 9-1, 9-2 07 апреля 2022 г.

Разнобой по алгебре

1. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c верно неравенство
$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}\geqslant\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.$$

2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых верно равенство $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=2200^{2200}$?

3. Докажите, что уравнение $3y^2=x^4+x$ не имеет натуральных решений.

4. Числа a, b, c, d положительные. Найти наименьшее значение выражения
$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^4+\left(\frac{b+c}{d}\right)^4+\left(\frac{c+d}{a}\right)^4+\left(\frac{d+a}{b}\right)^4.$$

5. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

6. Для положительных чисел x, y, z докажите, что
$$\frac{x-y}{xy+2y+1}+\frac{y-z}{yz+2z+1}+\frac{z-x}{zx+2x+1}\geqslant 0.$$

7. Найти наименьшую константу C, такую, что из любых положительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (не обязательно различных) можно выбрать четыре числа, таких, что $\left|\frac{a_k}{a_l}-\frac{a_m}{a_n}\right|\leqslant C$.

8. Пусть n — натуральное число, $a_1=n$ и a_k для каждого $k\geqslant 2$ выбирается так, что a_k — наименьшее целое число на отрезке $[0;k-1]$, такое, что $k\mid a_1+\ldots+a_k$. Докажите, что, начиная с некоторого момента, последовательность $\{a_k\}$ стабилизируется.

9. Найдите все такие составные числа n, что для любого разложения на два натуральных сомножителя $n=xy$ сумма $x+y$ является степенью двойки.

10. Для каких натуральных чисел $s\geqslant 4$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $s=a+b+c+d$ и $abc+abd+acd+bcd$ делится на s?