Геометрический разнобой

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD. Высота треугольника ABD, проведенная из вершины D, пересекает диагональ AC в точке E. Докажите, что $BE = BC$.

2. В треугольнике ABC провели высоты AD, BE, CF. Одна из точек пересечения EF и описанной окружности треугольника ABC обозначим за P. Прямые BP и DF пересекаются в точке Q. Докажите, что $AP = AQ$.

3. Окружность ω проходит через три середины сторон треугольника ABC. Стороны треугольника отсекают от ω три маленькие дуги. Докажите, что одна из них равна сумме двух других.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и медиану AM. На сторонах AB и AC отметили точки X и Y такие, что $AX = XC$ и $AY = YB$. Докажите, что середина XY равноудалена от H и M.

5. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

6. Серединный перпендикуляр к стороне AC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

7. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и прямой AB (за точкой B), и, кроме того, касается окружности ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL пересекает окружности ω и Ω повторно в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB || CM$. Докажите, что треугольник $\triangle LCM$ равнобедренный.

8. На «меньших» дугах AB, AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC.

9. В треугольнике ABC отметили M середину BC. В треугольниках AMB и AMC отметили центры вписанных окружностей X и Y. Также в треугольниках AMB и AMC отметили центры P и Q вневписанных окружностей находящихся напротив вершины M. Докажите, что точки X, Y, P и Q лежат на одной окружности.