Простые числа

1. Докажите, что если существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что число $(n-2)!+n^2-1$ — простое, то простых чисел-близнецов бесконечно много.

2. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b найдутся такие различные простые числа p и q, большие 10^{2022}, что число $ap+bq$ окажется составным.

3. Пусть $p>5$ — простое число и $S:=\{p-n^2: n\in\mathbb{N}, n^2<p\}$. Докажите, что во множестве S найдутся два числа, одно из которых делит другое.

4. Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{2022}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

5. Пусть M — некоторое непустое (возможно, бесконечное) подмножество множества простых чисел. Известно, что для любого конечного подмножества $K\subset M$ число $\left(\prod\limits_{p\in K} p\right)-1$ раскладывается на простые множители, принадлежащие M. Докажите, что тогда M — это всё множество простых чисел.

6. Обозначим через s_n сумму первых n простых чисел. Докажите, что для любого натурального n строго между числами s_n и s_{n+1} лежит точный квадрат.

7. Дано нечётное натуральное число a, большее 100. На доску выписали все натуральные числа вида $\dfrac{a-n^2}{4}$, где n — натуральное число. Оказалось, что при $n\leqslant\sqrt{a/5}$ все они простые. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску натуральных чисел простое или равно единице.

8. На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из чисел, записанных в первой строке, больше, чем $\dfrac{n^k}{p_1p_2\dots p_k}$, где p_1, p_2, ..., p_k — все простые числа, меньшие n.

9. Для заданного нечетного числа $n>3$ обозначим через k и ℓ наименьшие натуральные числа такие, что числа $kn+1$ и ℓn — точные квадраты. Известно, что $k, \ell>n/4$. Докажите, что число n — простое.