Увидеть граф

1. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

2. На свободные поля шахматной доски по одному выставляются короли. Первый выставляется произвольно, каждый следующий должен бить нечетное число ранее выставленных. Какое наибольшее число королей можно выставить?

3. В клубе «Что? Где? Когда?» провели анкетирование, в котором требовалось назвать своего любимого писателя, художника и композитора. Оказалось, что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым для не более чем k человек. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на не более чем $3k-2$ группы, чтобы в каждой группе любые два человека имели абсолютно разные вкусы.

4. В таблице $n \times m$ отметили k клеток. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать 3 отмеченные клетки, центры которых образуют прямоугольный треугольник?

5. Грани куба $5 \times 5 \times 5$ разбиты на клетки со стороной 1. Каждую клетку покрасили в красный, жёлтый или зелёный цвет так, что клетки, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красных клеток могло быть?

6. Промежуток из одного или несколько подряд идущих дней назовем нечетным, если нечетное число из этих дней были дождливыми. Каково наибольшее возможное число нечетных промежутков в июле?

7. Дано некоторое натуральное n. Какое наименьшее количество элементов может быть в множестве, обладающем следующим свойством: для любого $k = 2, 3, \dots, n$ найдутся два числа из множества с разностью F_k? Напомним, что числа Фибоначчи — это последовательность чисел, заданная начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$.