Симметрические многочлены

Определение. Многочлен $f(x, y)$ называется *симметрическим*, если $f(x, y) = f(y, x)$. Многочлен F от многих переменных называется симметрическим, если он не меняется при любой перестановке его аргументов.

Определение. Многочлены $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$ называются *элементарными симметрическими многочленами* от двух переменных.

Аналогично, многочлены $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ и $\sigma_3 = xyz$ называются *элементарными симметрическими многочленами* от трех переменных.

Элементарные симметрические многочлены часто возникают вместе с теоремой Виета для квадратного или кубического уравнения. Полезно выписывать и исследовать такие уравнения.

Мысль. Если мы работаем с симметрическим выражением (многочленом или дробью), оказывается полезным сделать замену переменных и переписать выражение через элементарные симметрические многочлены. Оказывается, это всегда возможно (см. последнюю задачу).

На практике чаще всего приходится выражать суммы k-х степеней переменных. Такие суммы называются *суммами Ньютона* и обозначаются через s_k. Т.е. для двух переменных $s_k = x^k + y^k$, а для трех переменных $s_k = x^k + y^k + z^k$.

Всюду далее в задачах, состоящих из двух пунктов, в первом пункте рассматриваются симметрические многочлены от двух переменных, а во втором пункте — от трех переменных.

1. **(а)** Выразите через σ_1 и σ_2 многочлены s_2, s_3, s_4.

(б) Выразите через σ_1, σ_2 и σ_3 многочлены s_2 и s_3.

2. **Формулы Ньютона.**

(а) Для всех натуральных $k \geqslant 2$ докажите формулу $s_k = s_{k-1}\sigma_1 - s_{k-2}\sigma_2$.

(б) Для всех натуральных $k \geqslant 3$ докажите формулу $s_k = s_{k-1}\sigma_1 - s_{k-2}\sigma_2 + s_{k-3}\sigma_3$.

3. Про целые числа a, b, c известно, что $a+b+c = 0$. Докажите, что число $2a^4+2b^4+2c^4$ является квадратом целого числа.

4. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$ и $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x?

5. Действительные числа x, y, z выбираются так, что выполняются равенства $xy + yz + zx = 4$, $xyz = 6$. Доказать, что при любом таком выборе значение выражения

$$\left(xy - \frac{3}{2}(x + y)\right)\left(yz - \frac{3}{2}(y + z)\right)\left(zx - \frac{3}{2}(z + x)\right)$$

является одним и тем же числом, и найти это число

6. Сократите дробь $\dfrac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$.

7. Пусть a, b, c — взаимно простые в совокупности натуральные числа и

$$D_n = (a+b+c, a^2+b^2+c^2, a^n+b^n+c^n)$$

(наибольший общий делитель трех чисел).

(а) Для каждого n, кратного 3, найдите все возможные значения D_n.

(б) Докажите, что для любого n, не кратного 3, число D_n может быть сколь угодно велико.

8. **(а)** Докажите, что любой симметрический многочлен от двух переменных может быть представлен в виде многочлена от величин σ_1 и σ_2.

(б) Докажите аналогичное утверждение для симметрических многочленов от трех переменных.