Квадратные трехчлены

1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений

$$(x-a)(x-b)=x-c, \quad (x-b)(x-c)=x-a, \quad (x-c)(x-a)=x-b$$

имеет решение.

2. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) \geqslant f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

3. Рассматриваются графики всевозможных приведенных квадратных трехчленов, имеющих два различных вещественных корня. Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников с вершинами в точках пересечения этих графиков с осями координат, проходят через фиксированную точку.

4. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

5. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что $[f(x)] = f([x])$?

6. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих, может быть в последовательности $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ...?

7. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые a_1, a_2, ..., a_n, что уравнение

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + (a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1) = 0$$

имеет по крайней мере один целый корень?

8. Пусть λ — положительный корень уравнения $x^2 - 2022x - 1 = 0$. Определим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = [\lambda x_n]$. Найти остаток числа x_{2022} по модулю 2022.