

Разнойбой

1. Имеется 24 карандаша четырех цветов — по 6 карандашей каждого цвета. Их раздали 6 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?
2. У натурального числа n есть такие два различных натуральных делителя a и b , что

$$(a - 1)(b + 2) = n - 2.$$

Докажите, что $2n$ – квадрат натурального числа.

3. В остроугольном треугольнике ABC AH_1 , BH_2 — высоты, D — проекция H_1 на AC , E — проекция D на AB , F — точка пересечения ED и AH_1 . Докажите, что $H_2F \parallel BC$.
4. На столе в ряд расположены 50 монет разной ценности. Алиса и Боб по очереди берут одну монету с края до тех пор, пока они есть. Докажите, что Алиса (ходит первой) может гарантировать себе как половину от общей суммы.
5. Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что НОД любых двух из них равен их разности?
6. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D , а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC . Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.
7. У Пети и Коли в тетрадях записаны по два числа; изначально – это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 — у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трёхчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля – квадратный трёхчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни; иначе ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5?
8. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, при этом в сумме дают хотя бы 100. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех этих чисел?
9. Вокруг прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность, на меньших дугах AC и BC взяты их середины — K и P соответственно. Отрезок KP пересекает катет AC в точке N . Центр вписанной окружности треугольника ABC — I . Найти угол NIC .