Последовательности

1. На доске написано число, большее 1. Каждую минуту Лена делит написанное на доске число на его дробную часть и записывает на доску вместо старого. Докажите, что когда-нибудь на доске появится либо целое число, либо число, большее 20212022. (Напомним, что дробная часть числа x — это разность между x и наибольшим целым числом, не превосходящим x.)

2. Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями $x_1 = 20$, $x_2 = 22$, $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$. Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль и найдите номер этого члена.

3. Последовательность положительных вещественных чисел $\{a_n\}$ такова, что $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$. Докажите, что $a_n < \frac{1}{n}$ для всех натуральных n.

4. Последовательность $\{a_n\}$ строится следующим образом: a_1, a_2 — произвольные действительные числа, при $n \geqslant 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$. При некотором выборе a_1, a_2 получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой $a_n = n + \langle\sqrt{n}\rangle$, где $\langle x\rangle$ — ближайшее к x целое число (число с дробной частью 0,5 округляется вверх). Найдите наименьшее натуральное k, такое, что числа a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+2021} образуют 2022 последовательных натуральных числа.

6. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = b_n + c_n, \quad c_{n+1} = c_n + d_n, \quad d_{n+1} = d_n + a_n.$$

Известно, что все эти последовательности периодичны. Докажите, что их вторые члены равны 0.

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$. Докажите, что $1 - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant 1$ для всех $n \geqslant 2$.

8. Пусть $z_1 < z_2 < \ldots$ — бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что существует единственное натуральное n, такое, что

$$z_n < \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} \leqslant z_{n+1}.$$