

Тренировочная олимпиада I

Олимпиада рассчитана на 4 часа. Письменные решения необходимо присылать на платформу <https://cheops.olimpiada.ru>.

1. Можно ли числа от 99 до 200 выписать в ряд, используя каждое ровно 1 раз, так, чтобы любые два числа, стоящих рядом, отличались либо на 2, либо в 2 раза?
2. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100. Разрешается поменять местами числа, находящиеся в соседних клетках в одной строке, если левое больше правого. Разрешается поменять местами числа в соседних клетках в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Можно ли для какой-нибудь расстановки чисел с помощью этих операций получить таблицу, в которой расстановка чисел симметрична исходной расстановке относительно диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний?
3. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа $a^2 + b$ и $a + b^2$ — простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ взаимно простые.
4. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , а ее диагонали — в точке Q . Точка M на меньшем основании BC такова, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.
5. В стране 2021! городов, любые 2 города соединены двухсторонним авиасообщением одной из 2021 компаний. Для какого максимального k в этой стране гарантированно можно выбрать k компаний и закрыть все рейсы этих компаний так, что из любого города всё ещё можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками?