

Клетчатый разнобой

1. На доске 8×8 стоят 50 фишек. Если в каком-то квадрате 2×2 стоит всего одна фишка, то её можно убрать. Докажите, что за несколько таких ходов убрать все фишки с доски не удастся.
2. Клетки квадрата со стороной 2022 покрашены в 10 цветов, каждый цвет присутствует. Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовём пару цветов хорошей, если есть две соседние по стороне клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар может быть?
3. Клетчатая доска $2m \times 2n$ раскрашена в шахматную раскраску. Сколькими способами можно поставить на белые клетки такой доски mn фишек так, чтобы в одной клетке стояло не более одной фишки и никакие две фишки не стояли в соседних по диагонали клетках?
4. В квадрате 2022×2022 закрасили главную диагональ, а также все клетки под ней. Сколько существует способов разрезать по линиям сетки закрашенную часть квадрата на 2022 прямоугольников?
5. Бесконечная клетчатая плоскость разбита на доминошки (клетчатые прямоугольники 1×2). Если любую горизонтальную доминошку разбиения переместить на 49 клеток вправо или влево, то тоже получится доминошка разбиения. Если любую вертикальную доминошку разбиения переместить на 49 клеток вверх или вниз, то тоже получится доминошка разбиения. Может ли такое быть?
6. В клетчатой таблице $n \times n$ ($n > 4$) поставлены n знаков «+» в клетках одной диагонали и знаки «-» во всех остальных клетках. Разрешается в некоторой строке или в некотором столбце поменять все знаки на противоположные. Докажите, что после любого количества таких операций в таблице останется не менее n плюсов.
7. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток Т-тетраминошку — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)
8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку красивой, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?