

Задачи по геометрии

1. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность Ω . Касательные к Ω в точках A и B пересекаются в точке D . Прямая DC пересекает Ω в точке E . Докажите, что прямая AE делит отрезок BD пополам.
2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. По дуге AD , не содержащей точек B и C , движется точка P . Фиксированная прямая ℓ , перпендикулярная прямой BC , пересекает лучи BP , CP в точках B_0 , C_0 соответственно. Докажите, что касательная, проведенная к описанной окружности треугольника PB_0C_0 в точке P , проходит через фиксированную точку.
3. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD описана около окружности. Известно, что $\angle BCD = 2\angle BAD$. Найдите $\frac{AB}{BC}$.
4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D , прямая, проходящая через точку D , пересекает отрезок AB и продолжение стороны AC в точках X и Y соответственно. Окружность, описанная около XBD пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке Z , отличной от B . Прямые ZD и ZY пересекают ω в точках V и W . Докажите, что $VW = AB$.
5. На окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, отмечены точки M и N — середины дуг AB и CD соответственно. Докажите, что MN делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанных окружностей треугольников ABC и ADC .
6. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке H . Точка O — центр описанной окружности. Докажите, что O, H, A_1 и точка, симметричная A относительно B_1C_1 лежат на одной окружности.
7. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$; точки E и F — середины AB и CD соответственно; O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что EF проходит через точки касания вписанной окружности треугольника AOD с его сторонами AO и OD .
8. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB , I — центр вписанной окружности. Пусть P — точка на описанной окружности треугольника AIB . Прямые, проходящие через точку P параллельно CA и CB , пересекают AB в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через точку P параллельно AB пересекает CA и CB в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DF и EG пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .
9. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке N . Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K , пересекает внешнюю окружность в точках A и B . Пусть M — середина дуги AB , не содержащей точку N . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника BMK не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.