Процессы

1. На столе — куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трех камней?

2. Автомат хранит в памяти натуральное число, изначально не делящееся на пять. Каждую минуту он прибавляет к текущему числу его последнюю цифру. Как только в результате получится степень двойки, автомат взорвётся. Докажите, что рано или поздно он взорвётся.

3. В ряд стоит 2018 чашек. За один ход разрешается взять четыре подряд идущие чашки и переставить их в обратном порядке. Можно ли такими операциями переставить все чашки в обратном порядке?

4. **(а)** В вершинах единичного квадрата сидят три кузнечика. Они могут передвигаться так: кузнечик перепрыгивает через любого из двух остальных, перелетая его на расстояние, на которое он до него прыгал. Могут ли через какое-то время кузнечики оказаться в вершинах квадрата со стороной 2?
   (б) То же самое, но кузнечика четыре.

5. Собственным делителем числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом a разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

6. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено черный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число клетчатых квадратов так, что будут выполняться два условия: 1) все черные клетки лежат в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади K.

7. Круг разбит на 2016 секторов, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 2016$ по часовой стрелке. В каждом секторе изначально сидит один таракан. За ход разрешается делать одну из двух операций: 1) переместить всех тараканов из сектора с номером 1 в сектор с номером 2; 2) переместить вообще всех тараканов в круге в следующий по часовой стрелке сектор.
   (а) Все тараканы собрались в одном секторе. Какое наименьшее число операций вида 2) могло быть сделано?
   (б) За какое минимальное число действий можно всех тараканов собрать в одном секторе?

8. Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $\frac{1}{2}$.

9. Изначально на доске написано натуральное число. Если на доске уже есть число a, то разрешается дописать на нее число $2a + 1$ или $\frac{a}{a+2}$. После нескольких таких операций оказалось, что на доске есть число 2022. Докажите, что оно там находилось изначально.