# Процессы

1. Автомат хранит в памяти натуральное число, изначально не делящееся на пять. Каждую минуту он прибавляет к текущему числу его последнюю цифру. Как только в результате получится степень двойки, автомат взорвётся. Докажите, что рано или поздно он взорвётся.

2. В ряд стоит 2018 чашек. За один ход разрешается взять четыре подряд идущие чашки и переставить их в обратном порядке. Можно ли такими операциями переставить все чашки в обратном порядке?

3. В вершинах единичного квадрата сидят четыре кузнечика. Они могут передвигаться так: кузнечик перепрыгивает через любого из двух остальных, перелетая его на расстояние, на которое он до него прыгал. Могут ли через какое-то время кузнечики оказаться в вершинах квадрата со стороной 2?

4. Собственным делителем числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом а разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

5. На бесконечном листе клетчатой бумаги $N$ клеток окрашено черный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число клетчатых квадратов так, что будут выполняться два условия: 1) все черные клетки лежат в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате $K$ площадь черных клеток составит не менее 1/5 и не более 4/5 площади $K$.

6. Круг разбит на 2016 секторов, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 2016$ по часовой стрелке. В каждом секторе изначально сидит один таракан. За ход разрешается делать одну из двух операций: 1) переместить всех тараканов из сектора с номером 1 в сектор с номером 2; 2) переместить вообще всех тараканов в круге в следующий по часовой стрелке сектор.
   **(а)** Все тараканы собрались в одном секторе. Какое наименьшее число операций вида 2) могло быть сделано?
   **(б)** За какое минимальное число действий можно всех тараканов собрать в одном секторе?

7. Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $\frac{1}{2}$.

8. Изначально на доске написано натуральное число. Если на доске уже есть число $a$, то разрешается дописать на нее число $2a+1$ или $\frac{a}{a+2}$. После нескольких таких операций оказалось, что на доске есть число 2022. Докажите, что оно там находилось изначально.

9. Вика отметила на окружности 20 точек $A_1, A_2, \dots, A_{20}$ (нумерация по часовой стрелке), причём эти точки можно разбить на пары диаметрально противоположных. Далее Вика посадила в каждую отмеченную точку по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает вдоль окружности через одного из своих соседей, перелетая его на расстояние, на которое он до него прыгал. При этом запрещено пролетать над другими кузнечиками. Также ни в какой точке окружности не должно оказываться более одного кузнечика. В какой-то момент оказалось, что какие-то 19 кузнечиков сидят в точках $A1, A2, \dots, A_{19}$, а двадцатый кузнечик находится на дуге $A_{19}A_{20}A_1$. Вика утверждает, что тогда двадцатый кузнечик обязательно сидит в точке $A_{20}$. Права ли она?