

Теоремы Чебы и Менелая

Теорема Чебы. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке если и только если $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Теорема Менелая. Пусть на сторонах треугольника AB , BC и на продолжении стороны AC лежат точки C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Тогда точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой если и только если $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

- Докажите с помощью теоремы Чебы, что медианы пересекаются в одной точке.
- Чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 в треугольнике ABC пересекаются в точке P .
(а) Известно, что

$$BA_1 : A_1C = 3 : 2, \quad AP : PA_1 = 2 : 1.$$

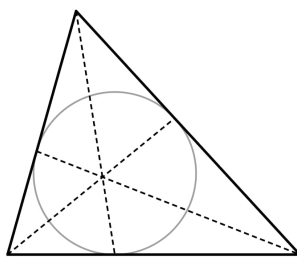
С помощью теорем Чебы и Менелая найдите отношения на оставшихся чевианах и сторонах.

(б) Отрезки B_1C_1 и AA_1 пересекаются в точке X . Известно, что

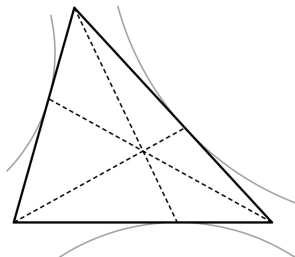
$$AC_1 : C_1B = 1 : 2, \quad BP : PB_1 = 3 : 1.$$

С помощью теорем Чебы и Менелая найдите отношения $B_1X : XC_1$ и $AX : XP$.

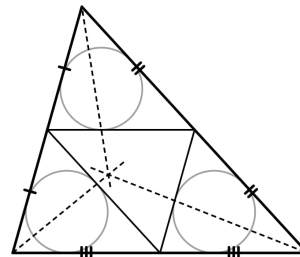
- Теорема ван Обеля.** Чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 в треугольнике ABC пересекаются в точке P . Докажите, что $AP : PA_1 = AC_1 : C_1B + AB_1 : B_1C$.
- (а) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с соответствующими точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника, пересекаются в одной точке (*точка Жергонна*, см. рис.)
(б) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с соответствующими точками касания трёх внеписанных окружностей со сторонами треугольника, пересекаются в одной точке (*точка Нагеля*, см. рис.)
- Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами высот, проведённых к этим сторонам, пересекаются в одной точке.
- Точки A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон BC , AC , AB треугольника ABC соответственно.
(а) Окружности, вписанные в треугольники AB_1C_1 , BA_1C_1 , CA_1B_1 касаются отрезков B_1C_1 , A_1C_1 , A_1B_1 в точках A_2 , B_2 , C_2 соответственно. Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке (см. рис.). Что это за точка для треугольника ABC ?
(б) Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается отрезков B_1C_1 , A_1C_1 , A_1B_1 в точках A_3 , B_3 , C_3 соответственно. Докажите, что прямые AA_3 , BB_3 , CC_3 пересекаются в одной точке (см. рис.). Что это за точка для треугольника ABC ?



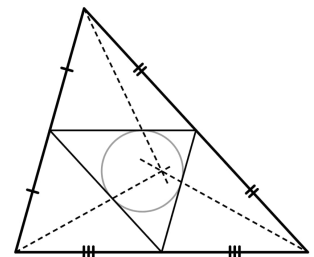
Точка Жергонна



Точка Нагеля



к задаче 6а



к задаче 6б