

Девятое домашнее задание. Подготовка к региональному этапу...

1. Петя загадал натуральное число N , Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа $N + 1$, затем сумму цифр числа $N + 2$ и т. д. Верно ли, что рано или поздно умный Вася сможет с гарантией установить Петино число?
2. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.
3. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8 , делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (доминошками) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседних клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?
4. Серёжа выбрал два различных простых числа p и q . Он считает натуральное число n хорошим, если число $p + q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k . (Например, если бы Серёжа выбрал $p = 7$ и $q = 3$, то он бы счёл число $n = 2$ хорошим, поскольку $7 + 3 = 2^3 + 2^0 + 2^0$). Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел.
5. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F , причем E лежит между B и F . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Прямые AE и DF касаются окружности, описанной около треугольника AOD . Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника EOF .